اولین المپیاد ترکیبیات ایران

مسائل رویداد به همراه راه‌حل‌ها

اولین المپیاد ترکیبیات ایران
مسائل رویداد به همراه راه حل‌ها

این دفترچه توسط سیدرضا حسینی، متین یوسفی، بنیامین قاسمی‌نیا، ابوالفضل اسدی و علیرضا دادگرنیا آماده شده است.

با تشکر ویژه از مرتضی ثقفیان.

اولین المپیاد ترکیبیات ایران در روز چهارشنبه، ۳ اردیبهشت سال ۱۳۹۹ با شرکت ۷۵۰ نفر در ۳۲۰ گروه دو یا سه نفره برگزار شد. کمیته‌ی انتخاب سوال اولین المپیاد ترکیبیات ایران شامل

مرتضی ثقفیان، علیرضا علیپور، یاسر احمدی فولادی، عباس ثروتی، ابوالفضل اسدی، سید رضا حسینی، سید حسام فیروزی، افروز جبل‌عاملی

بود. کمیته‌ی انتخاب سوال از یاری

عرفان معینی، علیرضا عبدالله‌پور، کسری مسعودی، شایان پیغمبری، سینا پاک‌سرشت، امیررضا اکبری، آرشام جمشیدی، محمد مهدی حاتمی، صدرا دشتی، محمد حیدری، محمد سعید حقی، محمد باقر شریفی، درسا مجدی، محدثه غفاری، ثنا امین‌ناجی، امیر محمد ایمانی، مهرشاد محمدی، سوگل سامانیان، دیبا هاشمی

که نقش اساسی در برگزاری رویداد به صورت آنلاین داشتند، بسیار قدردان است. در نهایت تشکر ویژه از آرمان کریمی و محمد علی حیدری که طراحی سایت را بر عهده داشتند.

فهرست مطالب

امتحان پاسخ کوتاه

سوالات

سوال ۱

جدولی ۹ $\times$ ۹ داریم. در خانه‌ی میانی سطر بالا یک خرس و در خانه‌ی میانی سطر پایین یک کندوی عسل قرار دارد. می‌خواهیم در شش خانه از جدول (به جز خانه‌های ابتدایی خرس و کندو) حفره‌ای ایجاد کنیم. پس از ایجاد حفره‌ها خرس شروع به حرکت می‌کند، در هر مرحله به یکی از خانه‌های مجاور ضلعی بدون حفره می‌رود و با کوتاه‌ترین مسیر ممکن خود را به کندو می‌رساند. حفره‌ها باید به نحوی انتخاب شوند که خرس، دست کم یک مسیر برای رسیدن به کندو داشته باشد. در حالات مختلف انتخاب مکان حفره‌ها، بیشینه‌ی تعداد مراحلی که خرس برای رسیدن به کندو طی می‌کند، چیست؟

سوال ۲

در چند رشته‌ی هفت رقمی با حروف a، b و c هیچ دو حرف مجاوری برابر نبوده و هم‌چنین هیچ دو زیررشته‌ی حداقل دو حرفی برابر نیستند؟
توضیح: منظور از زیررشته، تعدادی حرف متوالی در رشته است.

سوال ۳

تعدادی کارت داریم که روی هر یک از آن‌ها یکی از زوج مرتب‌های (۰, ۰)، (۰, ۱)، ... یا (۹, ۹) نوشته شده است. دستگاهی داریم که هر مرحله با گرفتن دو کارت با زوج مرتب‌های (a,b) و (c,d) علاوه بر برگرداندن دو کارت داده شده، دو کارت دیگر با زوج مرتب‌های $(\min\{a,c\},\min\{b,d\})$ و $(\max\{a,c\},\max\{b,d\})$ به ما می‌دهد. دست کم چند کارت در آغاز کار نیاز داریم تا بتوانیم با تعدادی مرحله، تمام ۱۰۰ کارت متمایز ممکن را تولید کنیم؟

سوال ۴

سازمان لیگ فوتبال کشور آبولفستان اعلام کرده در صورتی که کرونا تا آذرماه طول بکشد، در فصل آینده به دلیل کمبود فرصت، هر دو تیم تنها یک بار با هم بازی خواهند کرد (یعنی بازی‌ها به صورت رفت و برگشت نخواهد بود). این لیگ ۲۰۴۸ تیم دارد. برای تعیین میزبان، سازمان لیگ الگوریتم زیر را اجرا خواهد کرد:

> به ازای هر بازی در هفته‌ی iاُم، اگر تعداد میزبانی‌های دو تیم تا هفته‌ی $i-1$اُم متفاوت باشد، تیمی که تاکنون میزبانی کم‌تری داشته، میزبان می‌شود؛ در غیر این صورت میزبان را به طور تصادفی برمی‌گزینیم.

حداکثر تعداد میزبانی‌های ممکن یک تیم تا انتهای فصل چیست؟

سوال ۵

به چند طریق می‌توان مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۹۹\}$ را به چند زیرمجموعه افراز کرد، طوری که میانگین اعضای هر زیرمجموعه برابر با تعداد زیرمجموعه‌ها باشد؟

سوال ۶

به هر زیرمجموعه‌ی ناتهی از مجموعه‌ی $\{۱۰, ۱۲, \ldots, ۲۶\}$ مقدار زیر را نسبت می‌دهیم:

$$\frac{\text{حاصل‌ضرب اعضا}}{\text{۲}^{\text{تعداد اعضا}}}$$

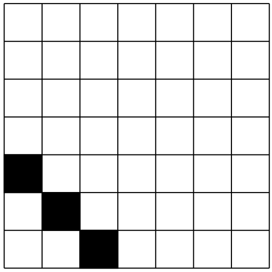
برای مثال به زیرمجموعه‌ی $\{۱۰, ۱۴, ۱۸\}$ مقدار $\frac{۱۰\times۱۴\times۱۸}{۲^۳}$ نسبت داده می‌شود. مجموع اعداد نسبت داده شده چیست؟

سوال ۷

قورباغه‌ای در نقطه‌ی مبدأ محور اعداد قرار دارد. در هر مرحله قورباغه یک یا دو واحد به سمت راست می‌جهد. احتمال این را که قورباغه پس از تعدادی مرحله روی نقطه‌ی ۱۰ بنشیند، در نظر بگیرید. فرض کنید این احتمال به صورت $\frac{a}{b}$ باشد که a و b اعدادی طبیعی و نسبت به هم اول هستند. $a+b$ چیست؟

سوال ۸

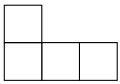
به هر ردیف موازی دو قطر بزرگ جدول یک **نوار** می‌گوییم. برای مثال یک نوار در شکل زیر کشیده‌ایم:



توجه کنید هر یک از خانه‌های گوشه به تنهایی یک نوار محسوب می‌شوند؛ بنابراین جدول بالا دارای ۲۶ نوار است. حال جدولی ۱۳۹۹ × ۱۳۹۹ در نظر بگیرید. می‌خواهیم در برخی از خانه‌های جدول یک مهره بگذاریم، طوری که هر نوار شامل فرد مهره باشد. کمینه‌ی ممکن تعداد مهره‌ها را a و بیشینه‌ی آن را b در نظر بگیرید. $a+b$ را بیابید.

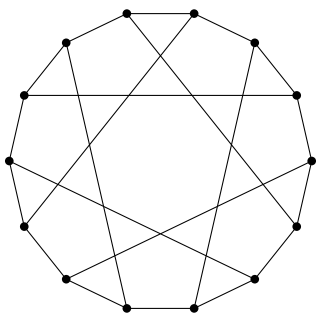
سوال ۹

حداکثر چند کاشی به شکل زیر (و دوران‌ها و قرینه‌های آن) می‌توان در یک جدول ۱۰ × ۱۰ قرار داد، طوری که هیچ دو کاشی حتی یک نقطه‌ی مشترک نداشته باشند؟



سوال ۱۰

شکل زیر یک گراف است. **عدد** هر یال را تعداد یال‌های قطع کننده‌ی آن در نظر می‌گیریم (برخورد روی رأس‌ها تقاطع محسوب نمی‌شود). بیشینه‌ی عدد تمام یال‌های گراف را **زشتی** گراف می‌نامیم. می‌خواهیم همین گراف را دوباره بکشیم، طوری که هیچ یالی از رأس‌ها (به جز دو سرش) نگذرد و هم‌چنین زشتی گراف کمینه شود. این مقدار کمینه را بیابید.



سوال ۱۱

در خانه‌های یک جدول ۲۰۲۰×۱۳۹۹ تعدادی مهره قرار داده‌ایم. در هر مرحله می‌توانیم یک خانه با بیش از یک مهره انتخاب کنیم، دو مهره از آن را برداریم، یکی را به خانه‌ی بالایی و دیگری را به خانه‌ی راستی منتقل کنیم (خانه‌ی بالایی خانه‌های سطر بالا، خانه‌ی متناظرشان در سطر پایین، و خانه‌ی راستی خانه‌های ستون سمت راست، خانه‌ی متناظرشان در ستون سمت چپ است). کمینه‌ی تعداد مهره‌های لازم را بیابید، طوری که بتوان نامتناهی گام انجام داد، بدون این که توقف حاصل شود.

سوال ۱۲

تعدادی مستطیل با ویژگی‌های زیر داریم:

- اضلاع مستطیل‌ها افقی و عمودی هستند.
- طول اضلاع مستطیل‌ها فقط می‌تواند از اعداد $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ باشد.
- طول دست کم یکی از اضلاع هر مستطیل برابر ۶ است.
- مجموع مساحت مستطیل‌ها به ۱۰۰ نمی‌رسد.

کمینه‌ی k را بیابید، طوری که همواره بتوان مستطیل‌ها را بدون هم‌پوشانی در یک مستطیل با ضلع افقی ۱۰ و ضلع عمودی k جای داد (دوران دادن مستطیل‌ها مجاز نیست).

متن زیر را بخوانید و با توجه به آن به سه سوال بعد پاسخ دهید:

فرض کنید G گرافی با رأس‌های ۱ تا n و A زیرمجموعه‌ای زوج عضوی از رأس‌های G باشد. می‌خواهیم تعدادی از یال‌های گراف را انتخاب کنیم، طوری که درجه‌ی هر رأس A فرد و درجه‌ی هر رأس خارج A زوج شود. کمینه‌ی تعداد یال‌های انتخابی برای محقق شدن هدف را $f(G, A)$ می‌نامیم.

سوال ۱۳

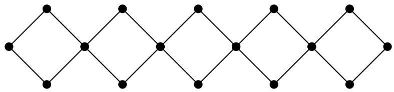
فرض کنید $n = ۱۰$ و $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ باشد. به ازای چند G اولیه $f(G, A) = n - ۱$ است؟

سوال ۱۴

فرض کنید G یک دور ۱۹ رأسی باشد. مجموع مقادیر $f(G, A)$ به ازای تمام A ها چیست؟

سوال ۱۵

فرض کنید G گراف زیر باشد:



به ازای چند A مقدار $f(G, A)$ برابر ۹ خواهد شد؟

پاسخ نهایی سوالات:

۱	۱۶
۲	۱۸
۳	۱۰
۴	۱۰۲۹
۵	۱
۶	۷۲۶۴۸۵۷۵۹
۷	۱۷۰۷
۸	۱۹۵۸۶۰۲
۹	۱۲
۱۰	۱
۱۱	۳۴۱۹
۱۲	۱۸
۱۳	۳۳۸۶۸۸۰۰
۱۴	۲۰۲۸۴۷۸
۱۵	۱۶۲۰

امتحان تشریحی

سوالات

تفاضل افزایشی .... ۱۰ امتیاز

۲۰۲۰ تیم در یک لیگ فوتبال شرکت کردند و هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم مسابقه دادند. هیچ کدام از بازی‌ها مساوی نشد. در فوتبال هر برد، ۳ امتیاز و هر باخت، ۰ امتیاز دارد. تیم‌ها در جدول ابتدا بر اساس امتیاز و سپس بر اساس تفاضل گل (تعداد گل‌های زده منهای تعداد گل‌های خورده) رتبه‌بندی می‌شوند. آیا ممکن است تفاضل تیم‌ها در انتهای لیگ از بالا به پایین اکیداً صعودی باشد؟

بازی بی‌رقیب .... ۱۰ امتیاز

مرتضی و امیررضا با هم یک بازی انجام می‌دهند. ابتدا هر کدام ۱۰۰ بار تاس می‌اندازند و بر اساس آن یک رشته‌ی ۱۰۰ رقمی با ارقام ۱ تا ۶ برای خود می‌سازند. هیچ کدام رشته‌ی طرف مقابل را نمی‌بینند. سپس به طور همزمان هر نفر یکی از ارقام رشته‌ی طرف مقابل را انتخاب می‌کند؛ برای مثال مرتضی بگوید: «رقم شماره ۴» و امیررضا بگوید: «رقم شماره ۲۹». اگر هر دو رقم انتخاب شده ۶ باشد، هر دو برنده می‌شوند و در غیر این صورت هر دو می‌بازند. مرتضی و امیررضا می‌توانند روش بازی‌شان را پیش از آغاز بازی هماهنگ کنند. آیا آن‌ها می‌توانند طوری بازی کنند که احتمال بردشان بیش‌تر از $\frac{۱}{۳۶}$ شود؟

وترهای متقاطع .... ۱۰ امتیاز

۱۳۹۹ نقطه دور یک دایره و تعدادی از وترهای بین آن‌ها کشیده شده است.

آ) در هر مرحله می‌توانیم دو وتر متقاطع (برخورد روی دایره تقاطع محسوب نمی‌شود) PQ و RS را انتخاب کرده و پس از پاک کردن یکی از آن‌ها، وترهای PS، PR، QS و QR را رسم کنیم (ممکن است برخی از این چهار وتر قبلاً رسم شده باشند که اشکالی ندارد). فرض کنید k کمینه‌ی ممکن تعداد وترها پس از تعدادی مرحله باشد. بیشینه‌ی k به ازای وضعیت‌های ابتدایی مختلف چیست؟ (۳ امتیاز)

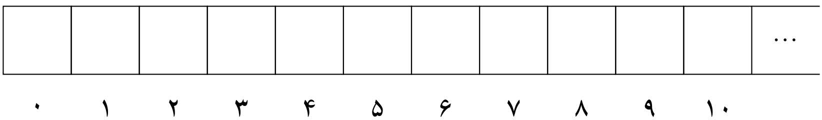
ب) همان سوال قسمت «آ» با این تفاوت که هر دو وتر PQ و RS پاک می‌شوند. (۷ امتیاز)

دوست مشترک .... ۱۰ امتیاز

در یک جمع ۹۹ نفره، دوستی یک رابطه‌ی دوطرفه است. هر کسی به اندازه‌ی یکی از اعداد ۸۱، ۸۲، ... و ۹۰ دوست دارد. ثابت کنید می‌توان ۱۰ نفر با تعداد دوستان برابر انتخاب کرد، طوری که دست کم یک نفر در جمع، دوست مشترک همه‌ی آن‌ها باشد.

عروج .... ۱۰ امتیاز

نوار نامتناهی زیر، شمایی از زندگی آبولف است:



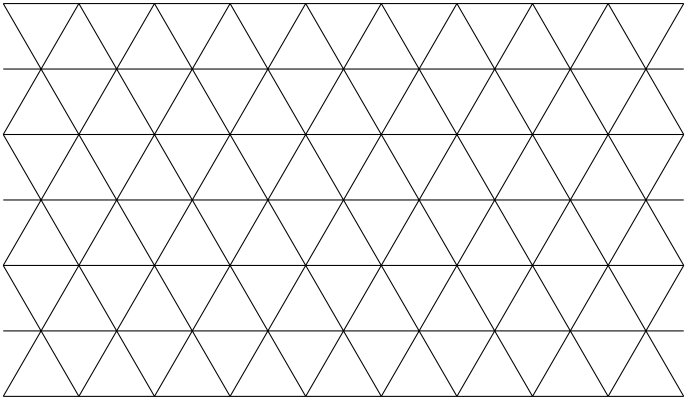
خانه‌ی شماره ۰ جهنم است! در هر یک از خانه‌های دیگر یک شیطان قرار دارد. شیطان خانه‌ی ۱ خود شخص ابلیس است! در ابتدا هر شیطان (از جمله خود ابلیس) به یکی از اشکال دیو، جن یا انسان در می‌آید. آبولف در ابتدا روی خانه‌ی ۱ است و هر چه به خانه‌های با شماره‌ی بیش‌تر برود، به بهشت نزدیک‌تر می‌شود. هر مرحله اتفاقات زیر می‌افتد:

> شیطان حاضر در خانه‌ی آبولف، او را وسوسه می‌کند. اگر این شیطان به یکی از اشکال دیو یا جن باشد، آبولف گول نخورده و یک خانه به راست می‌رود؛ در غیر این صورت آبولف گول خورده و یک خانه به چپ می‌رود. پس از حرکت آبولف، شیطانی که تلاش برای وسوسه انجام داد، از دیو، جن و انسان به ترتیب به جن، انسان و دیو تغییر شکل می‌دهد. هم‌چنین اگر ابلیس، آبولف را گول بزند، برای نخستین بار آبولف مقاومت کرده و در خانه‌ی ابلیس می‌ماند، اما برای بار دوم به جهنم ابدی می‌رود و کارش تمام است! توجه کنید ابلیس هم مانند سایر شیاطین تغییر شکل می‌دهد.

ثابت کنید آبولف جهنمی نخواهد شد و به سمت بهشت، عروج خواهد کرد (یعنی هر عدد طبیعی را دیر یا زود خواهد دید)!

شبکه‌ی مثلثی .... ۱۰ امتیاز

یک صفحه به شبکه‌ای از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با ضلع واحد تقسیم شده است. ثابت کنید هر چندضلعی محدب یا معقر با محیط ۱۳۹۹ که اضلاع آن روی خطوط شبکه قرار دارند، دارای دست کم یک زاویه‌ی ۱۲۰ یا ۲۴۰ درجه است.



سکه‌یابی .... ۱۰ امتیاز

۱۰۰۰ سکه داریم که ۹۹۸ تا از آن‌ها دو رو سفید و یکی از آن‌ها دو رو قرمز است و سکه‌ی باقی‌مانده یک روی قرمز و یک روی سفید دارد. سکه‌ها روکش دارند و ما رنگ آن‌ها را نمی‌بینیم. دستگاهی داریم که در هر مرحله می‌توانیم تعدادی سکه روی کف آن قرار دهیم؛ سپس دستگاه، سطح پایین (سطحی که با دستگاه تماس دارد) سکه‌های گذاشته شده را بررسی کرده و به ما می‌گوید آیا دست کم یکی از آن‌ها قرمز است یا خیر. آیا روشی با ۱۷ مرحله استفاده از دستگاه وجود دارد که هم‌واره سکه‌ی تمام‌قرمز را پیدا کند؟

راه حل‌ها

تفاضل افزایشی .... ۱۰ امتیاز

۲۰۲۰ تیم در یک لیگ فوتبال شرکت کردند و هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم مسابقه دادند. هیچ کدام از بازی‌ها مساوی نشد. برد و باخت در فوتبال به ترتیب ۳ و ۰ امتیاز دارد. تیم‌ها در جدول ابتدا بر اساس امتیاز و سپس بر اساس تفاضل گل (تعداد گل‌های زده منهای تعداد گل‌های خورده) رتبه‌بندی می‌شوند. آیا ممکن است تفاضل تیم‌ها در انتهای لیگ از بالا به پایین اکیداً صعودی باشد؟

طراح: ابوالفضل اسدی

پاسخ: خیر، ممکن نیست. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید تفاضل تیم‌ها از بالا به پایین اکیداً صعودی باشد. امکان ندارد دو تیم امتیاز برابر کسب کرده باشند، زیرا در این صورت بین آن دو، تیم بالاتر تفاضل ناکم‌تر دارد که با فرض سوال در تناقض است. پس تیم‌ها امتیازهای مختلفی کسب کرده‌اند. از آن رو که امتیازهای ممکن تنها ۰، ۳، ۶، ...و ۳×۲۰۱۹ است (۲۰۲۰ حالت)، هر کدام از امتیازها توسط دقیقاً یک تیم کسب شده‌اند. تیم با ۳×۲۰۱۹ برد تمام بازی‌ها را برده است، پس در رتبه‌ی یکم با تفاضل مثبت قرار می‌گیرد. هم‌چنین تیم با ۰ برد، تمام بازی‌ها را باخته است، پس در رتبه‌ی آخر با تفاضل منفی قرار می‌گیرد. پس تفاضل تیم یکم از تفاضل تیم آخر بیش‌تر است. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

بازی بی‌رقیب .... ۱۰ امتیاز

مرتضی و امیررضا با هم یک بازی انجام می‌دهند. ابتدا هر کدام ۱۰۰ بار تاس می‌اندازند و بر اساس آن یک رشته‌ی ۱۰۰ رقمی با ارقام ۱ تا ۶ برای خود می‌سازند. هیچ کدام رشته‌ی طرف مقابل را نمی‌بینند. سپس به طور همزمان هر نفر یکی از ارقام رشته‌ی طرف مقابل را انتخاب می‌کند؛ برای مثال مرتضی بگوید: «رقم شماره ۴» و امیررضا بگوید: «رقم شماره ۲۹». اگر هر دو رقم انتخاب شده ۶ باشد، هر دو برنده می‌شوند و در غیر این صورت هر دو می‌بازند. مرتضی و امیررضا می‌توانند روش بازی‌شان را پیش از آغاز بازی هماهنگ کنند. آیا آن‌ها می‌توانند طوری بازی کنند که احتمال بردشان

بیش‌تر از $\frac{۱}{۳۶}$ شود؟

طراح: مرتضی ثقفیان

پاسخ: بله، می‌توانند. هر کدام، جایگاه اولین رقم ۶ در رشته‌ی خود را می‌گویند (اگر در رشته ۶ وجود نداشت، ۱ می‌گویند). در صورتی که نخستین رقم ۶ برای دو رشته در جایگاه یکسانی رخ بدهد، این دو نفر می‌برند. احتمال رخ دادن اولین ۶ در جایگاه k برای هر دو رشته برابر است با:

$$\left(\left(\frac{۵}{۶}\right)^{k-۱} \times \frac{۱}{۶}\right)^{۲}$$

با در نظر گرفتن حاصل جمع این مقدار به ازای k از ۱ تا ۱۰۰ داریم:

$$\sum_{k=۱}^{۱۰۰}\left(\left(\frac{۵}{۶}\right)^{k-۱} \times \frac{۱}{۶}\right)^{۲} = \frac{۱}{۳۶} + \sum_{k=۲}^{۱۰۰}\left(\left(\frac{۵}{۶}\right)^{k-۱} \times \frac{۱}{۶}\right)^{۲} > \frac{۱}{۳۶}$$

وترهای متقاطع .... ۱۰ امتیاز

۱۳۹۹ نقطه دور یک دایره و تعدادی از وترهای بین آن‌ها کشیده شده است.

آ) در هر مرحله می‌توانیم دو وتر متقاطع (برخورد روی دایره تقاطع محسوب نمی‌شود) PQ و RS را انتخاب کرده و پس از پاک کردن یکی از آن‌ها، وترهای PS، PR، QS و QR را رسم کنیم (ممکن است برخی از این چهار وتر قبلاً رسم شده باشند که اشکالی ندارد). فرض کنید k کمینه‌ی ممکن تعداد وترها پس از تعدادی مرحله باشد. بیشینه‌ی k به ازای وضعیت‌های ابتدایی مختلف چیست؟ (۳ امتیاز)

طراح: افروز جبل‌عاملی

ب) همان سوال قسمت «آ» با این تفاوت که هر دو وتر PQ و RS پاک می‌شوند. (۷ امتیاز)

طراح: ابوالفضل اسدی

پاسخ بخش آ: به یک وتر **ضلع** گوییم، اگر دو نقطه‌ی متوالی را به هم متصل کند؛ در غیر این صورت به آن **قطر** می‌گوییم.

ثابت می‌کنیم به ازای هر $n \geq ۳$ پاسخ به ازای n نقطه برابر $۲n - ۳$ است (در این صورت پاسخ مسئله ۲۷۹۵ خواهد شد).

ابتدا یک وضعیت ابتدایی ارائه می‌دهیم که تعداد وترها در آن با انجام مراحل کم‌تر از $۲n - ۳$ نشود. کافی است فرض کنید نقاط متوالی به هم متصل هستند تا یک nـضلعی تشکیل دهند و قطرها نیز

یک مثلث‌بندی بسازند. در این وضعیت هیچ گامی قابل انجام نیست، پس تعداد وترها از وضعیت ابتدایی ($2n-3$) کم‌تر نخواهد شد.

حال ثابت می‌کنیم تمام وضعیت‌های ابتدایی می‌توانند به حالتی برسند که در آن هیچ دو قطری متقاطع نیستند. تعداد قطرها در این حالت حداکثر به اندازه‌ی یک مثلث‌بندی در nـضلعی ($n-3$) و تعداد اضلاع نیز حداکثر n است. پس حکم ثابت خواهد شد. حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. برای $n=3$ (پایه‌ی استقرا) حکم واضح است، زیرا هیچ قطری نداریم. فرض کنید حکم به ازای مقادیر کم‌تر از n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n نیز برقرار است. اگر قطری وجود نداشته باشد، حکم برقرار است. حال فرض کنید PQ یک قطر دل‌خواه باشد. به ازای هر قطر متقاطع با PQ مانند RS عملیات را روی این دو اجرا کرده و RS را حذف می‌کنیم. با این کار پس از تعدادی مرحله PQ با هیچ قطری متقاطع نخواهد بود. کافی است در طرفین قطر، کار را مطابق فرض استقرا انجام دهیم.

پاسخ بخش ب: ثابت می‌کنیم به ازای هر $n \geq 4$ پاسخ به ازای n نقطه برابر $2n-3$ است (در این صورت پاسخ مسئله ۲۷۹۵ خواهد شد). ارائه‌ی وضعیت ابتدایی مانند قسمت «آ» است.

ابتدا به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم به ازای هر $n \geq 4$، در صورتی که هیچ دو قطری متقاطع نباشند، دو رأس نامجاور وجود دارد که هیچ قطری از آن‌ها کشیده نشده است. برای $n=4$ (پایه‌ی استقرا) حکم واضح است. فرض کنید حکم برای مقادیر کم‌تر از n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم به ازای n نیز برقرار است. اگر قطر نداشته باشیم، هر دو رأس نامجاور خواسته‌ی حکم را برآورده می‌کنند. پس فرض کنید PQ یک قطر باشد. هر یک از طرفین PQ رأسی به جز P و Q دارند که هیچ قطری از آن‌ها کشیده نشده باشد (اگر مثلث باشد، رأس باقی‌مانده و در غیر این صورت طبق فرض استقرا). این دو رأس حکم را برآورده می‌کنند.

حال به اثبات حکم مسئله می‌پردازیم. کافی است به استقرای ضعیف روی n ثابت کنیم به ازای هر وضعیت اولیه می‌توان با تعدادی گام کاری کرد که هیچ دو قطری متقاطع نباشند. برای پایه‌ی استقرا $n=4$ را در نظر بگیرید که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $n-1$ نقطه درست باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نقطه نیز برقرار است. نقطه‌ای مانند A را حذف کرده و برای سایر نقطه‌ها، مطابق فرض استقرا کار را انجام می‌دهیم (صرفاً جهت درک بهتر شما، یکی از اضلاع فرض استقرا، قطر حکم استقرای ماست). مطابق حکم ثابت شده، دو رأس نامجاور در فرض استقرا وجود دارند، طوری که قطری در نقاط فرض استقرا از آن‌ها کشیده نشده باشد. دست کم یکی از این دو نقطه، در حکم استقرا با A مجاور نیستند. آن را در نظر گرفته و B می‌نامیم. با حذف B از نقطه‌ها، می‌توان برای $n-1$ نقطه‌ی دیگر به وضعیت مطلوب رسید (طبق فرض استقرا). حال هر تقاطع قطعاً قطر AB را دارد. اگر قطر AB موجود نباشد، حکم برقرار است. در غیر این صورت نقطه‌ای مانند C به جز A در فرض استقرای دوم وجود دارد، طوری که هیچ قطری در نقاط فرض استقرا از آن کشیده نشده باشد. اگر C مجاور B نباشد یا مجاور B باشد، اما به دیگر نقطه‌ی مجاور B وصل نباشد، کافی است آن را حذف کرده و وضعیت مطلوب را برای $n-1$ نقطه‌ی دیگر مطابق فرض استقرا ایجاد کنیم. پس فرض کنید C مجاور B است و به دیگر نقطه‌ی مجاور B (که آن را D می‌نامیم) نیز وصل

است. عملیات مسئله را روی قطرهای AB و CD انجام دهید. پس از آن هیچ قطری به نقطه‌ی B متصل نیست. کافی است B را حذف کرده و وضعیت مطلوب را برای بقیه‌ی نقطه‌ها مطابق فرض استقرا ایجاد کنیم.

دوست مشترک .... ۱۰ امتیاز

در یک جمع ۹۹ نفره، دوستی یک رابطه‌ی دوطرفه است. هر کسی به اندازه‌ی یکی از اعداد ۸۱، ۸۲، ... و ۹۰ دوست دارد. ثابت کنید می‌توان ۱۰ نفر با تعداد دوستان برابر انتخاب کرد، طوری که دست کم یک نفر در جمع، دوست مشترک همه‌ی آن‌ها باشد.

طراح: علیرضا علیپور

پاسخ: فرض کنید v رأس با بیش‌ترین درجه در گراف متناظر افراد باشد. دو حالت داریم:

- درجه‌ی v کم‌تر از ۹۰ باشد؛ در این صورت فرض کنید درجه‌ی v به صورت $t + ۸۰$ است که $۱ \leq t \leq ۹$. درجه‌ی همسایه‌های v حداکثر t حالت دارد؛ پس طبق اصل لانه‌ی کبوتری v دارای $\lceil \frac{۸۰+t}{t} \rceil$ همسایه با درجه‌ی برابر است. از آن‌جایی که $۱ \leq t \leq ۹$ این مقدار دست کم ۱۰ است و حکم ثابت می‌شود.
- درجه‌ی v برابر ۹۰ باشد؛ در این صورت تنها در حالتی مشکل وجود دارد که v دارای دقیقاً ۹ همسایه با درجه‌ی i به ازای هر $۸۱ \leq i \leq ۹۰$ باشد. در این صورت اگر A را دسته‌ی رأس‌های با درجه‌ی ۹۰ در گراف (شامل v) و B را دسته‌ی سایر رأس‌ها در نظر بگیریم، با شمردن تعداد یال‌های بین A و B به دو روش داریم:

$$(۹۰ - ۹) \times ۱۰ = ۸۱۰ \leq \text{تعداد یال‌های بین } A \text{ و } B \leq ۹ \times ۸۹ = ۸۰۱$$

تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند (سمت چپ عبارت را با در نظر گرفتن حداقل تعداد یال‌های هر رأس A به B و سمت راست عبارت را با در نظر گرفتن حداکثر تعداد یال‌های هر رأس B به A شمرده‌ایم).

عروج .... ۱۰ امتیاز

نوار نامتناهی زیر، شمایی از زندگی آبولف است:

											…
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	

خانه‌ی شماره ۰ جهنم است! در هر یک از خانه‌های دیگر یک شیطان قرار دارد. شیطان خانه‌ی ۱ خود شخص ابلیس است! در ابتدا هر شیطان (از جمله خود ابلیس) به یکی از اشکال دیو، جن یا انسان در می‌آید. آبولف در ابتدا روی خانه‌ی ۱ است و هر چه به خانه‌های با شماره‌ی بیش‌تر برود، به بهشت نزدیک‌تر می‌شود. هر مرحله اتفاقات زیر می‌افتد:

> شیطان حاضر در خانه‌ی آبولف، او را وسوسه می‌کند. اگر این شیطان به یکی از اشکال دیو یا جن باشد، آبولف گول نخورده و یک خانه به راست می‌رود؛ در غیر این صورت آبولف گول خورده و یک خانه به چپ می‌رود. پس از حرکت آبولف، شیطانی که تلاش برای وسوسه انجام داد، از دیو، جن و انسان به ترتیب به جن، انسان و دیو تغییر شکل می‌دهد. هم‌چنین اگر ابلیس، آبولف را گول بزند، برای نخستین بار آبولف مقاومت کرده و در خانه‌ی ابلیس می‌ماند، اما برای بار دوم به جهنم ابدی می‌رود و کارش تمام است! توجه کنید ابلیس هم مانند سایر شیاطین تغییر شکل می‌دهد.

ثابت کنید آبولف جهنمی نخواهد شد و به سمت بهشت، عروج خواهد کرد (یعنی هر عدد طبیعی را دیر یا زود خواهد دید)!

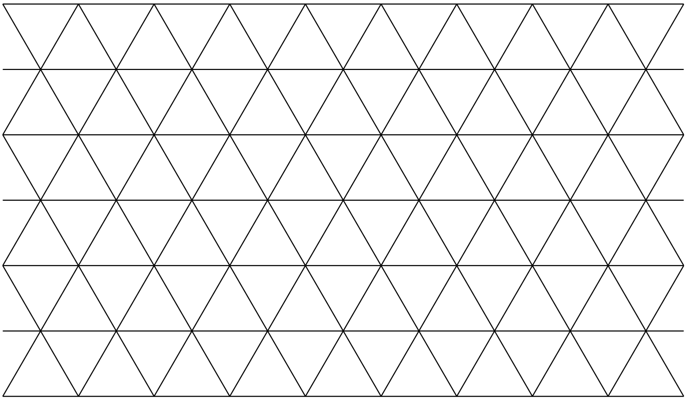
طراح: یاسر احمدی فولادی

پاسخ: ابتدا ثابت می‌کنیم آبولف به جهنم نخواهد رفت! از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید آبولف با متناهی گام به جهنم ابدی برود. راست‌ترین شیطانی را در نظر بگیرید که دست کم دو بار موفق به گول زدن آبولف شده باشد و آن را S بنامید (چنین شیطانی وجود دارد، زیرا ابلیس این خاصیت را دارد). هر شیطان در میان هر دو وسوسه‌ی موفق، دست کم دو بار در وسوسه کردن ناکام می‌شود. پس S دست کم دو بار آبولف را به خانه‌ی راستی S (که آن را S' می‌نامیم) فرستاده است. پس دست کم دو بار آبولف از S' به S بازمی‌گردد. این به آن معنی است که S' نیز دست کم دو بار آبولف را گول می‌زند که با راست‌ترین بودن S در تناقض است. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند. حال ثابت می‌کنیم آبولف، دیر یا زود هر عدد طبیعی را خواهد دید. از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض کنید آبولف بعد از خانه‌ی n را نبیند. پس از میان هر n مرحله‌ی متوالی، دست کم یک بار آبولف گول می‌خورد. $n^2 + 1$ مرحله‌ی نخست را در نظر بگیرید. طبق اصل لانه‌ی کبوتری شیطانی وجود دارد که دست کم دو بار موفق به گول زدن آبولف می‌شود. راست‌ترین شیطان با این ویژگی را

در نظر گرفته و مشابه استدلال قسمت قبل، شیطان سمت راست او نیز این خاصیت را خواهد داشت. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

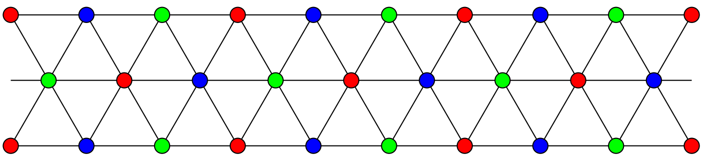
شبکه‌ی مثلثی .... ۱۰ امتیاز

یک صفحه به شبکه‌ای از مثلث‌های متساوی‌الاضلاع با ضلع واحد تقسیم شده است. ثابت کنید هر چندضلعی محدب یا معقر با محیط ۱۳۹۹ که اضلاع آن روی خطوط شبکه قرار دارند، دارای دست کم یک زاویه‌ی ۱۲۰ یا ۲۴۰ درجه است.



طراح: حسام فیروزی

پاسخ: رأس‌های مثلث‌های واحد را با الگوی زیر، رنگ‌آمیزی می‌کنیم:



یک رأس دل‌خواه از چندضلعی در نظر بگیرید و بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید سبز باشد. از این رأس آغاز کرده و محیط چندضلعی را بپیمایید. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنید رأس بعدی قرمز باشد. از برهان خلف استفاده می‌کنیم و فرض کنید چندضلعی دارای زاویه‌ی ۱۲۰ یا ۲۴۰ درجه نباشد. با هر حرکت از رأس‌های قرمز، آبی و سبز به ترتیب به رأس‌های آبی، سبز و قرمز می‌رویم. پس تعداد اضلاع چندضلعی باید مضرب سه باشد. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند.

سکه‌یابی .... ۱۰ امتیاز

۱۰۰۰ سکه داریم که ۹۹۸ تا از آن‌ها دو رو سفید و یکی از آن‌ها دو رو قرمز است و سکه‌ی باقی‌مانده یک روی قرمز و یک روی سفید دارد. سکه‌ها روکش دارند و ما رنگ آن‌ها را نمی‌بینیم. دستگاهی داریم که در هر مرحله می‌توانیم تعدادی سکه روی کف آن قرار دهیم؛ سپس دستگاه، سطح پایین (سطحی که با دستگاه تماس دارد) سکه‌های گذاشته شده را بررسی کرده و به ما می‌گوید آیا دست کم یکی از آن‌ها قرمز است یا خیر. آیا روشی با ۱۷ مرحله استفاده از دستگاه وجود دارد که همواره سکه‌ی تمام‌قرمز را پیدا کند؟

طراح: سید رضا حسینی

پاسخ: بله، وجود دارد.
لم ۱ : به ازای هر $n \geq ۲$ داریم:

$$F_n \leq ۲^{n-۲}$$

اثبات لم ۱ : حکم را به استقرای ضعیف روی n ثابت می‌کنیم. برای پایه $n = ۲$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$F_۲ = ۱ \leq ۲^{۲-۲} = ۱$$

فرض کنید حکم برای n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای $n + ۱$ نیز برقرار است:

$$F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱} \leq ۲F_n \leq ۲ \times ۲^{n-۲} = ۲^{n-۱}$$

لم ۲: گر n سکه شامل $n - ۱$ سکه‌ی تمام‌سفید و یک سکه‌ی تمام‌قرمز داشته باشیم، می‌توانیم در حداکثر $\lceil \log_۲ n \rceil$ مرحله سکه‌ی تمام‌قرمز را بیابیم.
اثبات لم ۲: حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱$ را در نظر بگیرید که در آن سکه‌ی تمام‌قرمز بدون استفاده از دستگاه قابل یافتن است. فرض کنید حکم برای مقادیر کم‌تر از n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. سکه‌ها را به دو دسته‌ی $\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor$ و $\lceil \frac{n}{۲} \rceil$ تایی تقسیم کرده و یکی از آن‌ها را در دستگاه می‌گذاریم. با پاسخ دستگاه متوجه می‌شویم که سکه‌ی تمام‌قرمز در کدام دسته است. کافی است کار را مطابق فرض استقرا در دسته‌ی شامل سکه‌ی تمام‌قرمز با حداکثر $\lceil \log_۲ (\lceil \frac{n}{۲} \rceil) \rceil$ مرحله بیابیم. پس کار در حداکثر $\lceil \log_۲ (\lceil \frac{n}{۲} \rceil) \rceil + ۱ \leq \lceil \log_۲ n \rceil$ مرحله قابل انجام است.
حل مسئله‌ی اصلی: ثابت می‌کنیم اگر حداکثر $k \leq F_n$ (عدد فیبوناچی nاُم) سکه با یکی از دو توزیع زیر داشته باشیم، روشی برای یافتن سکه‌ی تمام‌قرمز با n مرحله وجود دارد (از آن جایی که $F_{۱۷} \geq ۱۰۰۰$ مسئله حل خواهد شد):

- $k - ۲$ سکه‌ی تمام‌سفید، یک سکه‌ی تمام‌قرمز و یک سکه با یک روی سفید و یک روی قرمز
- $k - ۱$ سکه‌ی تمام‌سفید و یک سکه‌ی تمام‌قرمز

حکم را به استقرای قوی روی n ثابت می‌کنیم. برای پایه‌ی استقرا $n = ۱, ۲$ را در نظر می‌گیریم که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای مقادیر کم‌تر از n برقرار باشد. ثابت می‌کنیم حکم برای n نیز برقرار است. سکه‌ها را به دو دسته‌ی $a \leq F_{n-۱}$ و $b \leq F_{n-۲}$ تایی تقسیم می‌کنیم و سکه‌های دسته‌ی b تایی را به دستگاه می‌دهیم. دو حالت داریم:

- پاسخ دستگاه، عدم وجود قرمز باشد؛ در این صورت سکه‌ی تمام‌قرمز قطعاً در دسته‌ی a تایی است و طبق فرض استقرا می‌توان آن را با حداکثر $n - ۱$ مرحله‌ی دیگر یافت.
- پاسخ دستگاه، وجود قرمز باشد؛ همین b سکه را برگرانده و دوباره روی دستگاه می‌گذاریم. دو حالت داریم:
  - پاسخ دستگاه، عدم وجود قرمز باشد؛ در این صورت دسته‌ی a تایی شامل $a - ۱$ سکه‌ی تمام‌سفید و یک سکه‌ی تمام‌قرمز است. مطابق لم ۱ داریم:

$$a \leq F_{n-۱} \leq ۲^{n-۳}$$

    کافی است سکه‌ی تمام‌قرمز را مطابق روش لم ۲ با حداکثر $n - ۳$ مرحله بیابیم.
  - پاسخ دستگاه، وجود قرمز باشد؛ در این صورت دسته‌ی b تایی شامل سکه‌ی تمام‌قرمز است و کافی است طبق فرض استقرا آن را با حداکثر $n - ۲$ مرحله بیابیم.